Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Для билета

Вариант задания 2

№1

$6!$ – всего способ надеть носки

$3!$ – повторение синих

$2!$ – повторение серых

без учета поворачивания способов расположить носки

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$$

т.к. каждый носок можно повернуть, то способов поворачивания

$$2^6 = 64$$

Всего способов – $64 \cdot 60 = 3840$

Ответ: 3840.

№4

$$P(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy^2 + 3x^2y - 2x - y = (2x+y)^3 - 9x^2y - 18xy^2 - (2x+y) =$$

$$= \underbrace{(2x+y)(2x+y-1)(2x+y+1)}_{\text{три последовательных числа}} - \underbrace{9xy(x+2y)}_{\text{это произведение}}$$

Значит произведение $\vdots 3$

Значит разность $\vdots 3$ (1)

см продолжение на другой стороне листа

Можно использовать оборот листа для записи решений

Посмотрим на $x=y$

$P(x,y) = 9x^3 - 12x^3 + 3x^3 - 2x - x = -3x$

при $X < 0$ положительное (2)

перебираются все числа $\vdots 3$ от 1 до 10 000 000

В 1: мы доказали что $P(x,y)$ всегда $\vdots 3$, ~~значит~~

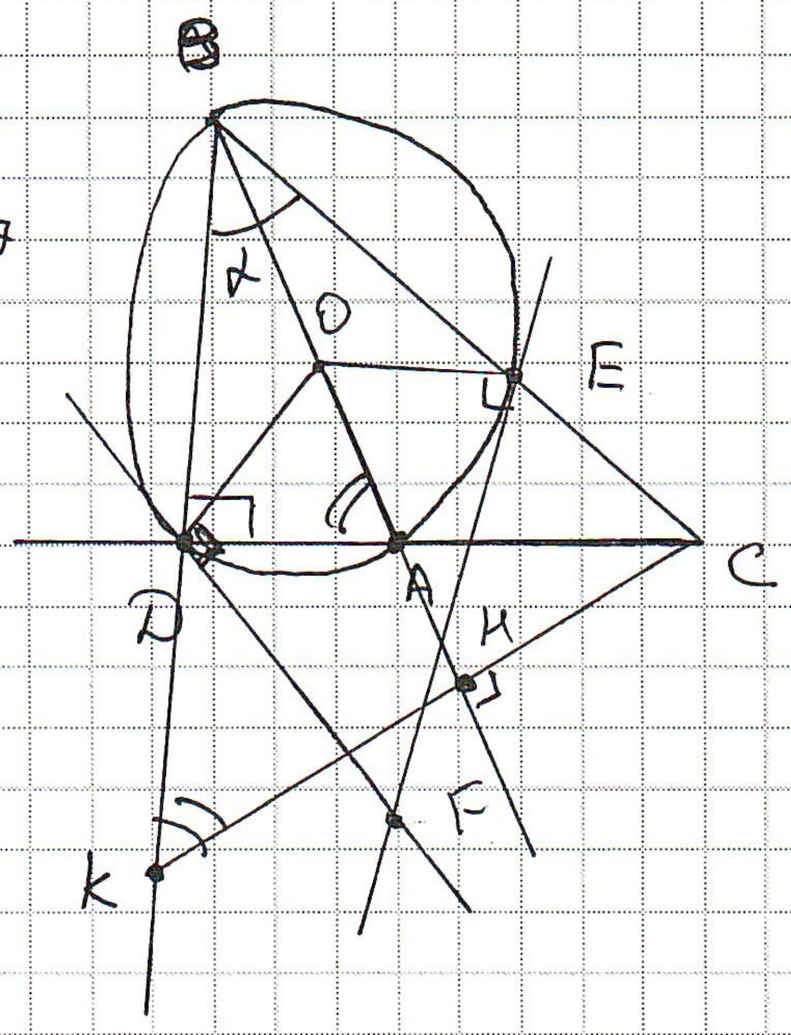
а во 2 мы нашли как получить все числа $\vdots 3$ (положительное)

значит $P(x,y)$ - ~~все~~ все числа $\vdots 3$ (положительное)

Значит разных значений $= \left[\frac{10\,000\,000}{3}\right] = 3\,333\,333$

Ответ: 3 333 333

№3



$\alpha = \arcsin 0{,}7$

$FE = 7$

$BA \cap CK = H$

1. O - центр окр, где AB - диам

$\angle DOE = 2\angle DBE = 2\alpha$

т.к. $\angle DOE$ - центральный

$\angle DBE$ - вписанный

$\angle BDA = 90°$ т.к. опирается на диам

2. т.к. $\Phi F_H EF$ - кас

$DF = EF = 7$

$\angle ODF = \angle OEF = 90°$

и FO - бисс $\angle DOE$ и $\angle DFE$

$\angle FOE = \angle FOD = \frac{\angle DOE}{2} = \alpha$

3. $\triangle OFE$

$OF = \frac{FE}{\sin\alpha} = \frac{7}{0{,}7} = 10$

$OE = \sqrt{OF^2 - FE^2} = \sqrt{100-49} = \sqrt{51}$ по т. Пифагора

4. $\angle BDC = 90° \Rightarrow \angle KDC = 90°$ смеж

5. $\frac{KC}{AB}$ $KC \perp AB \Rightarrow \angle AHK = 90°$

6. $\triangle DAF$:

$\angle DAF = 360° - \angle KDA - \angle KFA - \angle DKF =$

$= 180° - \angle DKF$

см продолжение на другом листе

7. $\angle DAB = 180° - \angle DAF = \angle DKF$

8. $\triangle KDC$ и $\triangle BDA$ – прямоугольные $\Rightarrow \triangle KDC \sim \triangle ADB$ по двум углам

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{KC}$$

9. $AB = 2OE = 2\sqrt{51}$, т.к. OE – радиус

10. $\triangle BDC$

$$tg\alpha = \frac{BD}{DC}, \quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0,7}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{0,7}{0,1\cdot\sqrt{51}}$$

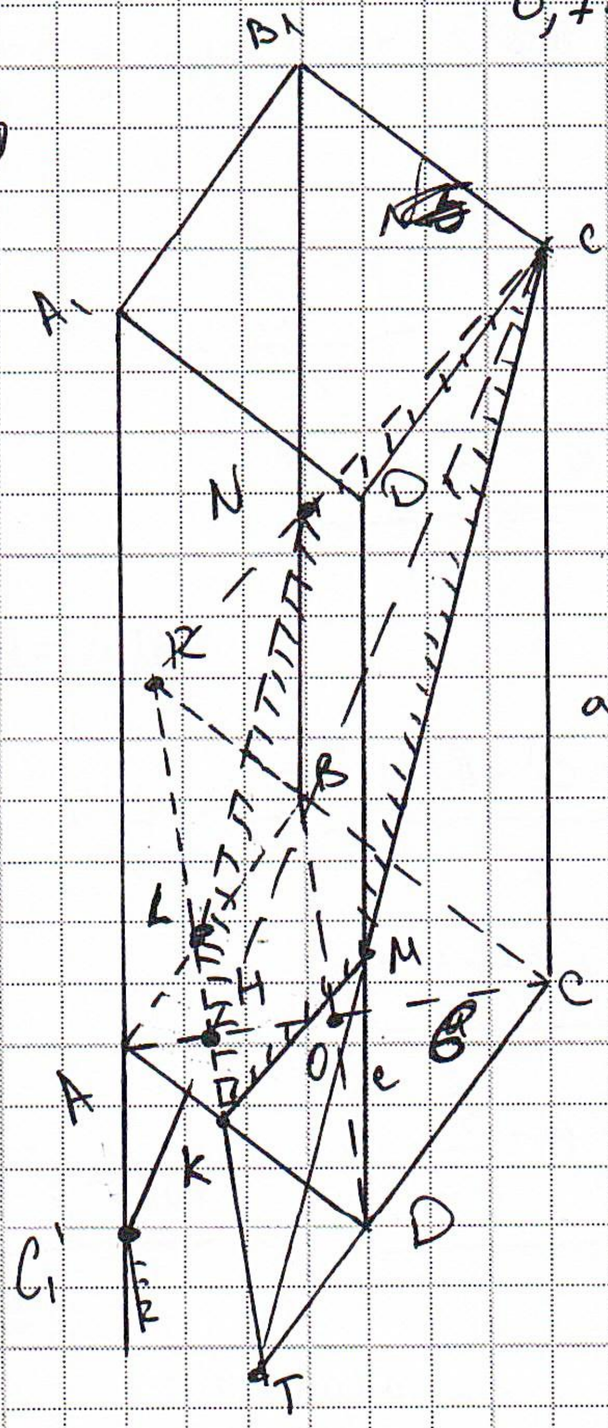
$$\frac{1}{tg\alpha} = \frac{AB}{KC} \qquad KC = AB \cdot tg\alpha = \frac{2\sqrt{51}\cdot 0,7}{0,1\cdot\sqrt{51}} = 14$$

11. По т. синусов $\triangle BKC$

$$\frac{KC}{\sin\alpha} = 2R \qquad R = \frac{14}{0,7\cdot 2} = 10$$

Ответ: 10

№5



2. Построение сечения

$C_1C_1' \cap AC = M$

т.к. $M \in LK$; $LK \parallel BD$

$LK \cap AB = L$

$LK \cap AD = K$

$LK \cap BC = R$

$LK \cap CD = T$

$RC_1 \cap B_1B = N$

$TC_1 \cap D_1D = M$

C_1NLKM – искомое сеч

$(C_1NLKM) = \alpha$

1. если плоскость сечения пересекает отрезок A_1A, то

$$S_{осн} = \frac{1}{2} BD \cdot AC$$

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} BD \cdot \sqrt{AC^2 + \frac{12^2}{5^2} AC^2} =$$

$$= \frac{1}{2} BD \cdot AC \cdot \frac{13}{5}$$

$$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{13}{5} = \frac{221}{90}$$

но $\frac{13}{5} > \frac{221}{90}$

Значит плоскость сечения пересекает $A'A$ за точкой A

см продолжение на другой стороне

3. $(ACC_1) \perp (ABC)$

$LK \perp AC$ т.к. $BD \perp AC$ диаг в ромбе

$\parallel$

$\alpha \wedge (ABC) = \angle C_1HC$.

4. Пусть $AC = b$

$C_1C = a$

$BD = c$

5. $tg \angle C_1HC = \frac{a}{HC} \Rightarrow HC = \frac{5}{12}a$

$AH = b - \frac{5}{12}a$

$\cos \angle C_1HC = \frac{1}{\sqrt{tg^2 \angle C_1HC + 1}} = \frac{5}{13}$

$C_1C_1' = \frac{AC}{\cos \angle C_1HC} = \frac{13}{5}b$

6. $\triangle AC_1'H \sim \triangle CC_1H$ по двум углам

(т.к. $AA_1 \parallel CC_1 \Rightarrow \angle C_1'AH = \angle C_1CH$ накрест

$\angle AHC_1' = \angle C_1HC$ верт) $\Rightarrow$ $\frac{C_1'H}{C_1H} = \frac{AH}{HC}$

$C_1H = \frac{HC}{AH} \cdot C_1'H = \frac{\frac{5}{12}a}{b - \frac{5}{12}a} \cdot C_1'H$

$C_1C = C_1H + C_1'H = \frac{b}{b - \frac{5}{12}a} C_1'H$

$C_1'H = \frac{C_1'C\left(b - \frac{5}{12}a\right)}{b} = \frac{13}{5}\left(b - \frac{5}{12}a\right)$

7. $LK \parallel BD \Rightarrow$ $\triangle ALK \sim \triangle ABD$ по двум углам (общий $\angle A$, $\angle ALK = \angle ABD$ соотв.)

$\frac{LK}{BD} = \frac{AH}{AO} = \frac{b - \frac{5}{12}a}{\frac{b}{2}} = \frac{2b - \frac{5}{6}a}{b}$

$AO = \frac{b}{2}$

$LK = \frac{\left(2b - \frac{5}{6}a\right)c}{b}$

8. $S_{осн} = \frac{b \cdot c}{2}$

$MN = BD$ т.к. они параллельны и $B_1B \parallel DD_1$

$S_{сеч} = S_{C_1NC_1'M} - S_{C_1'LK} = \frac{C_1C_1' \cdot MN}{2} - \frac{LK \cdot C_1'H}{2} =$ т.к. $BDMN$ – параллелограмм

$= \frac{13}{10}b \cdot c - \frac{\left(2b - \frac{5}{6}a\right)c \cdot 13\left(b - \frac{5}{12}a\right)}{10b}$

$\frac{S_{сеч}}{S_{осн}} = \frac{\frac{13}{10b}\left(b^2 - \left(2b - \frac{5}{6}a\right)\left(b - \frac{5}{12}a\right)\right)}{\frac{b}{2}} = \frac{13\left(-b^2 + \frac{2 \cdot 5}{6}ab - \frac{2 \cdot 5^2}{12^2}a^2\right)}{5b^2} =$

$= \frac{221}{90}$

см продолжение на другом листе

olymp.bmstu.ru

9. $\angle AC_1 \hat{} (ABC) = AC_1 \hat{} AC = \angle C_1AC$

$\angle C_1AC = \beta$

10. $\frac{a}{6} = tg\beta$

$13 \cdot 18 \left(-1 + \frac{2 \cdot 5}{6} \cdot tg\beta - \frac{2 \cdot 5^2}{12^2} \cdot tg^2\beta\right) = 221$

$\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 18}{12^2} tg^2\beta - \frac{13 \cdot 18 \cdot 45}{12} tg\beta + 455 = 0$

$$tg\beta = \frac{\frac{13 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 5}{12} \pm \sqrt{\frac{13^2 \cdot 18^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2}{12^2} - \frac{455 \cdot 2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 18}{12^2}}}{\frac{2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 18}{12^2}} =$$

$$= \frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{12^2}{5^2} - \frac{455 \cdot 12^2}{5^2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 18}} = \frac{12}{5} \pm \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2 \cdot 13 \cdot 18 - 455}{2 \cdot 13 \cdot 18}} =$$

$$= \frac{12}{5} \pm \frac{12}{5}\sqrt{\frac{13}{2 \cdot 13 \cdot 18}} = \frac{12}{5} \pm \frac{12}{30} = \frac{72 \pm 12}{30} = \frac{72 \pm 12}{30}$$

Т.к. $\angle\beta < \angle C_1HC$ то $tg\beta < tg\angle C_1HC$

Значит $tg\beta < \frac{12}{5} = \frac{72}{5}$

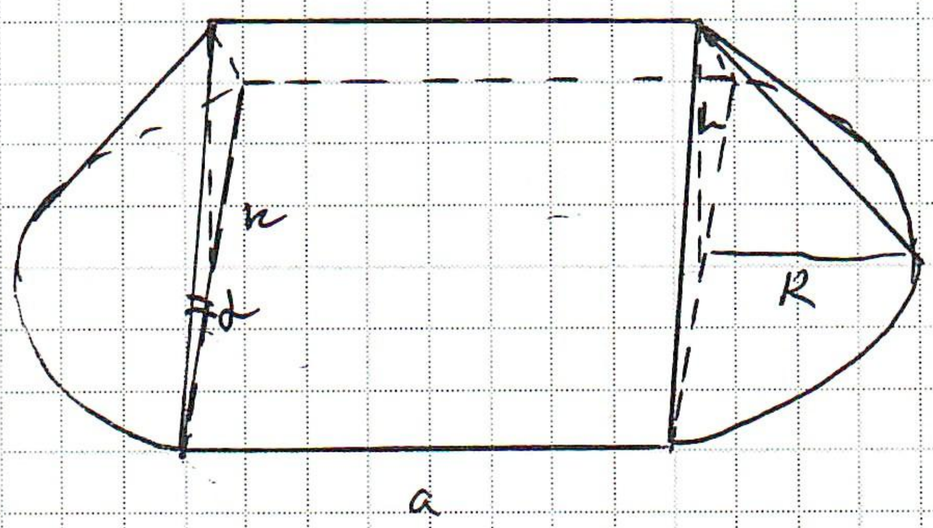
Значит $tg\beta = \frac{60}{30} = \frac{1}{2}$

$\angle C_1AC = \beta = arc\,tg\,\frac{1}{2}$

Ответ: $arctg\,\frac{1}{2}$

№6

$a = 4$ м



т.к. $\alpha = 45° \Rightarrow h = \frac{a}{2} = 2$ м

$R = \frac{a}{2} = h = 2$ м

~~Об.~~ $V = V_к + V_{пр}$

$V_к$ – объем конуса, $V_{пр}$ – объем призмы

$V_{пр} = a \cdot \frac{1}{2} a h = \frac{a^3}{4}$

$V_к = \frac{1}{3} h \cdot \pi R^2 = \frac{1}{3 \cdot 8} a^3 \pi$ $\quad \frac{\pi}{3} \approx 1{,}04$

$V = \frac{a^3}{4}\left(1 + \frac{1}{8}\pi\right) = \frac{4^3}{4}\left(1 + \underset{0{,}57}{1{,}04}\right) = 16 \cdot \underset{1{,}57}{2{,}04} = \cancel{32{,}64\ м^3 = 32{,}6 м^3}$

$= 24{,}92\ м^3 = 24{,}9 м^3$

V_1 – $x = \frac{h}{2} = 1$ м $= \frac{a}{4}$

$V_1 = \frac{a \cdot 2x \cdot x}{2} + \frac{1}{3} x \cdot \pi x^2 = x^3\left(4 + \frac{1}{3}\pi\right) = 5{,}04\ м^3$

$V_2 = V - V_1 = \underset{24{,}92}{\cancel{32{,}64}} - 5{,}04 = \cancel{27{,}6\ м^3}\ 19{,}88\ м^3$

$V_{в1} = \frac{5{,}04\ м^3}{1\ м^3} \cdot 0{,}4\ м^3 = 2{,}016\ м^3$

$V_{в2} = \frac{\cancel{27{,}6\ м^3}\ 19{,}88}{1\ м^3} \cdot 0{,}8\ м^3 = \cancel{22{,}08\ м^3} = 15{,}304\ м^3$

$V_в = V_{в1} + V_{в2} = \underset{15{,}304}{\cancel{22{,}08}} + 2{,}016 = \cancel{24{,}096\ м^3 = 24{,}1\ м^3}$

$= 17{,}32\ м^3 = 17{,}3 м^3$

Ответ: $\cancel{32{,}6\ м^3}$ – мак. объем снега, $\cancel{24{,}096}$ $\cancel{24{,}1\ м^3}$ – объем воды

$\cancel{32{,}6\ м^3}$

$24{,}9 м^3$

$17{,}3 м^3$

olymp.bmstu.ru.